张量分析和多项式优化的若干进展*

李浙宁[1] 凌 晨[2] 王宜举[3] 杨庆之[4,†]

摘要 张量分析 (也称多重数值线性代数) 主要包括张量分解和张量特征值的理论和算法，多项式优化主要包括目标和约束均为多项式的一类优化问题的理论和算法. 主要介绍这两个研究领域中若干新的研究结果. 对张量分析部分，主要介绍非负张量H-特征值谱半径的一些性质及求解方法，还介绍非负张量最大 (小) Z-特征值的优化表示及其解法；对多项式优化部分，主要介绍带单位球约束或离散二分单位取值、目标函数为齐次多项式的优化问题及其推广形式的多项式优化问题和半定松弛解法. 最后对所介绍领域的发展趋势做了预测和展望.

关键词 张量，特征值，谱半径，多项式优化，算法，半定松弛，近似算法，
中图分类号 O183
2010 数学分类号 53A45

Some advances in tensor analysis and polynomial optimization*

LI Zhening[1] LING Chen[2] WANG Yiju[3] YANG Qingzhi[4,†]

Abstract Tensor analysis (also called as numerical multilinear algebra) mainly includes tensor decomposition, tensor eigenvalue theory and relevant algorithms. Polynomial optimization mainly includes theory and algorithms for solving optimization problems with polynomial objects functions under polynomial constrains. This survey covers the most of recent advances in these two fields. For tensor analysis, we introduce some properties and algorithms concerning the spectral radius of nonnegative tensors' H-eigenvalue. We also discuss the optimization models and solution methods of nonnegative tensors' largest (smallest) Z-eigenvalue. For polynomial optimization problems, we mainly introduce the optimization of homogeneous polynomial function under the unit spherical constraints or binary constraints and their extended problems, and semidefinite relaxation methods for solving them approximately. We also look into the further perspective of these research topics.

Keywords tensor, eigenvalue, spectral radius, polynomial optimization, algorithm, semidefinite relaxation, approximation algorithm,
Chinese Library Classification O183
2010 Mathematics Subject Classification 53A45

收稿日期：2014年1月16日
* 基金项目：国家自然科学基金 (Nos. 11271206, 11171180, 11171083)
1. 上海大学数学系，上海 200444；Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, China
2. 杭州电子科技大学理学院, 杭州 310018；College of science, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China
3. 曲阜师范大学管理学院, 山东日照 276826；School of Management, Qufu Normal University, Rizhao 276826, Shandong, China
4. 南开大学数学科学学院, 天津 300071；School of Mathematical Sciences, Nankai University, Tianjin 300071, China
† 通讯作者 Corresponding author, Email: qz-yang@nankai.edu.cn

0 前 言

本文主要介绍张量分析和多项式优化方面的内容. 张量分析，主要指张量分解和张量特征值问题，其内容主要包括张量分解和张量特征值的理论和算法；多项式优化是指目标函数和约束函数都是多项式的一类优化问题. 鉴于二者的研究背景、出发点和研究内容等方面的不同，下面我们对这两部分分别进行介绍，但在算法方面会讨论它们之间的联系.

1 张量分析中的新进展

1.1 张量分析简介

张量虽然早在19世纪微分几何的研究中就被引入，但我们这里的张量主要是指高维数据的一种排列及它们在高阶数理统计、信号处理、图像处理和化学计量等领域中的含义，它可以被看成是矩阵的一种推广，和微分几何中张量的含义及着眼点不同 (如见[1]). 本文中张量分析主要指张量分解和张量特征值问题的理论及解法.

张量分解最初是由Hitchcock在1927年提出. 到20世纪60—70年代，越来越多的研究者开始在心理测量、化学计量等研究领域使用张量. 随着这些学科的发展及更多的领域对张量及其有关性质、解法等知识的进一步需求，深入而系统的理论研究就越来越重要了，并逐渐引起数学家，特别是应用数学家的重视. 从2004年开始，在美国、欧洲等地陆续举办了张量分解及其应用的学术会议，2007年Qi 等[2]对张量的运算、张量分解、张量特征值及其应用做了综述；2009年，Kolda等[1]在《SIAM Review》上对张量分解及其应用做了更详细的综述. 2009年，Cichocki等[3]在他们的著作《Nonnegative Matrix and Tensor Factorizations》中，详细介绍了张量分解中的各种概念及运算规则，各种非负矩阵和非负张量分解及它们在脑科学、盲源分离等领域中的应用，并介绍了几种经典的非线性优化方法. 这表明了张量分解中的一些计算可以归结为优化问题或使用优化方法去求解.

由于在心理统计学、化学计量学、信号处理、数值线性代数、计算机可视化、数值分析、图的分析和生物信息等越来越多的领域中需要用张量去表述一些问题，而且在有些情形下使用张量表述会比使用矩阵更有优势，这进一步促进了对张量分解的研究. 正如矩阵分解和逼近那样，之所以需要研究张量的分解及逼近，一方面是希望通过分解，能从大量的数据中得到对表征对象特点的刻画；另一方面，通过张量的低秩逼近，可以缓解处理海量数据在存储、传输、分析等方面的压力，以便能够比较准确且高效地处理各类数据.

张量是指数据的一种排列，一个m阶n维的张量，是指其中的元素下标是m个，而每一个指标的变化范围是从1到n, 这里m, n都是正整数. 显然，当m取1和2时，所表示的张量分别是n维向量和n阶方阵. 设$\mathcal{A}$是一个张量，可以记$\mathcal{A}=(a_{i_1\cdots i_m})$, 这里$i_j=1,\cdots,n$，$j=1,\cdots,m$，称$\mathcal{A}$是一个$m$阶$n$维 (正方) 张量. 如果其下标的任意置换不改变元素的值，则称该张量是对称的.

与矩阵一样，可以定义张量之间的加、减、乘法运算，也可以定义张量和矩阵、向量之间的乘积. 反之，可以定义一个张量的分解.

张量分解的定义方式有多种，其中常用的两种是：(1) CP分解，即将张量写为若干CP秩为1的张量 (若一个m阶n维张量$\mathcal{A}$可以写为m个非零n维向量的外积，则称这个外积是张量$\mathcal{A}$的CP秩1分解，并称张量$\mathcal{A}$的CP秩为1) 的和；(2) Tucker分解，它是矩阵奇异值分解的推广，比CP分解复杂. CP分解是Tucker分解的特殊情形. 还有一些其他的分解. 采用什么样的分解与问题的属性和要求有关.

如果一个张量可以写为若干个CP秩为1的张量的和，且求和的秩1张量个数不可减少，则称这个最小数为该张量的CP秩. CP秩1逼近是盲源分离 (BSS) 的直接的数学模型. 另外，与矩阵情形一样，用低秩的张量逼近高阶张量，在精度许可的条件下，可能会大大减少张量的存储、传输、分析等工作量. 但和矩阵情形不同的是，这时CP最佳逼近问题会

出现解不存在的情况，但若限定在某些特殊情形，比如非负张量的非负分解，则解是存在的 (如见[4]).

尽管已有各种计算CP分解、Tucker分解的方法，但算法的理论分析十分缺乏，其中一种较为得到认可的算法是交替最小二乘法 (ALS), 这类算法和矩阵计算的交替最小二乘法、可分离凸优化问题和可分离变分不等式中的交替方向法在思想上和算法步骤上类似.

在张量分解和最佳低秩逼近中，主要有两类方法：一类是直接法，这类方法主要借助矩阵理论中已有的结论和方法，得到关于张量分解的结论，如高阶奇异值分解 (HOSVD)；另一类是非线性最优化中的迭代算法和松弛技术，该方法一般结合问题的具体特点，得到相关的算法或松弛的凸优化问题与原问题的近似比.

从20世纪70年代起，张量分解、逼近及其在各领域中的应用研究在国外开始得到重视和有较快的发展，已经取得了十分丰富的结果. 相对而言，国内这方面的研究还处于起步阶段，为数不多的研究工作主要集中在用优化的方法对张量秩1最佳逼近等方面所做的理论研究 (如见[5]).

2005年，Qi[6]和Lim[7]分别独立提出了张量特征值与特征向量的概念，它们可以被看成是矩阵特征值与特征向量的推广. 可以说，张量特征值、特征向量最初的提出，主要是从数学角度出发对矩阵特征值、特征向量的自然发展和推广，与张量分解的发展背景和动机有很大不同. Qi和Lim都是考虑张量是对称及特征值、特征向量为实的情形. 后来，Chang等[8]给出了张量特征值、特征向量的一般定义. 随后张量特征值的理论及应用得到了快速发展.

1.2 张量特征值理论及算法方面的一些新进展

张量特征值与特征向量的定义主要有如下两种：

$$\mathcal{A}x^{m-1} = \lambda x^{[m-1]}$$

和

$$\mathcal{A}x^{m-1} = \lambda x, \quad \|x\|_2 = 1,$$

这里$\mathcal{A}x^{m-1}$表示n维向量，其第i个分量定义为

$$(\mathcal{A}x^{m-1})_i = \sum_{i=1}^{n} a_{i_1 i_2 \cdots i_m} x_{i_2} \cdots x_{i_m}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

可见，当$m = 2$时，二者是一致的. 在实数域中，称第一种定义中的λ, x分别为对应于张量$\mathcal{A}$的H-特征值和H-特征向量，第二种定义中的λ, x为对应的Z-特征值和Z-特征向量. 如果将第二种定义中的2-范数改为1-范数，这时，λ, x分别称为Z_1-特征值和Z_1-特征向量[9]. 与矩阵情形类似，可以对长方的张量定义奇异值和相应的特征向量.

在矩阵理论方面，利用特征多项式求解矩阵特征值是一个基本方法. 类似地，利用张量行列式概念可以引进张量特征多项式，并以此为基础研究张量特征值及其重要性质. 这可以为进一步研究张量特征值及其相关问题提供必要的理论基础和新思路. 已有的相关成果见[10].

Qi[6, 11]讨论了H-特征值的个数及所有特征值的和、积、重数、特征值在正交等变换下的不变性、圆盘估计等结果，并利用结式理论研究了齐次张量特征值的个数等. Qi等[12, 13]还指出了张量特征值在偶数阶张量的正性判别、医学图像、量子纠缠、弹性力学和控制论等领域中的应用.

Lim[7]利用变分方法引出了张量特征值、奇异值的定义并定义了张量的不可约性及非负不可分张量的Perron-Frobenius定理的初步结果. 随后Chang等[14]系统地研究了关于H-特征值的Perron-Frobenius定理，Yang等[15, 16]进一步将Perron-Frobenius理论推广到一般

非负张量情形并得到进一步的结果. Friedland等[17]对一般齐次多元多项式定义了更一般的特征值和特征向量，并通过图论中连通性的概念提出了弱不可约张量的定义，并在这个条件下进一步推广了Perron-Frobenius定理. Chang 等[18]对非负长方张量的情形，给出了推广的min-max定理等结果. Yang 等[19]进一步推广了长方张量最大奇异值的有关结果，并在一定条件下证明了推广的幂法的收敛性.

H-特征值的Perron-Frobenius定理及其他理论结果多数是由非负矩阵特征值中的相关结果发展而来，这方面的结果可以说已经比较完善了. 最近Chang, Qi和Zhang[20]对非负张量特征值理论给出了一个详细的综述, Yang等[21]也编辑了以非负张量研究为主要内容的专辑.

非负不可约条件下谱半径对应的特征向量的重数问题也是H-特征值理论中一个重要的研究课题，不同于矩阵情形，这里一个特征值对应的特征向量实几何重数和复几何重数可能是不等的. Chang等[8, 14]首先提出和研究了该问题，Yang等[22]对谱半径对应的特征向量为实几何单的和复几何单的做了进一步研究.

张量的分类及不同类之间的关系是张量研究中的一个重要课题，这种分类的必要性在于刻画张量性质的理论结果和算法收敛性等理论分析结果，都是在一定条件下，对某一类张量才成立的. 首先从矩阵发展推广到张量是不可约的、素的、本质正的等概念. 但由于张量要比矩阵复杂，通过张量的矩阵展开或基于对应图的不同定义，衍生出弱不可约、弱素、部分对称、弱对称、弱本质正等一系列新的在矩阵情形不会有的概念和定义，一个主要原因是由二阶 (平面) 矩阵情形扩展到三阶 (立体) 及以上情形，带来了新的问题. 在这些新的更弱的条件下，已有的命题是否成立或只是部分成立，都需要检查、证明或通过反例予以否定. Hu，Huang和Qi[23]研究了各种不同类的张量，并讨论了这几类张量之间的包含关系或交叉关系.

Ng, Qi和Zhou[24]首先将矩阵中求最大模特征值的幂法推广到计算张量的最大模H-特征值问题，Chang等[25]在张量是素的条件下证明了算法的收敛性，Zhang和Qi[26]在张量本质正的条件下证明了算法的线性收敛性结果. 这个结果后来被Chang[18]等推广到长方张量最大奇异值解法的研究中. Qi, Wang和Wang[27]对Z-特征值低阶情形提出了求最大模特征值的直接方法.

对一般非负张量情形，Chen等[28]通过对原张量加一个正扰动及内迭代不精确技巧，给出了一种求解一般张量谱半径的算法，并证明了算法的收敛性，还在一定条件下给出了算法的计算复杂度; 另外，对长方张量，他们还通过嵌入技巧，把长方张量最大奇异值的计算转化为正方张量谱半径的计算. 数值结果表明了这种处理方法的有效性. Hu等[23]采用对一般非负张量分解的方式，把求解谱半径问题转化为求解小规模不可约张量谱半径的办法，然后调用对不可约非负张量的幂法求解一般非负张量的谱半径.

Yang等[15]已经证明，对H-特征值，求非负不可约张量谱半径等价于求一个特殊的凸多项式优化问题，从而为可以在多项式时间内求解不可约张量H-谱半径提供了理论依据. Zhou等[29] 使用这种等价变换，再根据相关问题的特点，使用凸优化松弛技术，提出了求解非负不可约张量谱半径的算法.

相对来说，Z-特征值的应用背景更明确，但由于其非齐次性，导致对H-特征值的多数结论 (如Perron-Frobenius理论) 对Z-特征值和Z_1-特征值不成立. Chang等[9]对Z-特征值和Z_1-特征值的性质做了详细的研究.

对称情形的最大Z-特征值模的计算可以归结为单位球面上齐次张量函数全局最大值的计算，长方偏对称张量最大Z-奇异值的计算可以归结为双齐次函数在两个单位球面上的全局最大值的计算. 这是一类特殊的等式约束优化问题，也是特殊的多项式优化问题. 但不同于H-特征值情形，由于对H-特征值成立的min-max定理对$Z(Z_1)$-特征值不再成立，无法象H-特征值那样把求最大Z-特征值 (奇异值) 问题转化为一个等价的凸优化问题. 实际上，求非负张量最大$Z(Z_1)$-特征值 (奇异值) 问题本质上是一个非凸优化问题，是NP-难问题. 对这类问题的求解目前主要有三类方法：一类是采用约束优化中已有的算法或根据问题特点做适当变化去求解；另一类是采用类似于求最大H-特征值幂法的格式求解；

还有一类是采用为求解非凸二次规划问题或离散优化全局最优而发展起来的半定规划松弛技术，其想法是将要求的非凸优化问题的最优值估计在一个区间内，而区间两端的值通过求解原问题的一类凸松弛优化问题得到，再通过某种随机技术生成近似解. Kolda等[30]采用第二种方法提出了一种求最大 (小) Z-特征值的方法，为了克服Kofidis等[31]提出的算法可能不收敛的缺点，在目标函数加了偏移项，以保证其中参数充分大或充分小时，目标函数是凸的或凹的，然后再使用幂法. 但这种方法也无法保证求得最大Z-特征值. Qi, Wang和Wang[27]对低阶低维的特殊情形，给出了求解特征值、特征向量的直接方法. 可以说，前两种方法一般均无法保证求得最大或最小Z-特征值. 第三种求解技术可以纳入多项式全局最优化的求解方法中. Hu, Huang和Qi[32]将求解张量的最大 (及最小) Z-特征值问题转化为求解一系列半定规划问题，其中使用的主要方法是多项式优化中的平方和 (SOS) 方法. 在下一部分将对对称张量最大或最小Z-特征值或更一般多项式优化问题的解法及有关结果做较详细的论述.

1.3　进一步的发展趋势和问题

(1) 目前张量用于和超图理论有关的研究已得到一些有趣的结果 (见[33-36]) . 2013年5月在福州大学召开了超图谱理论的学术会议. 张量方法已渗透到大数据、压缩感知、视频技术、矩阵完备化等问题的研究中. 在这些问题的研究中，用张量代替矩阵是其主要变化. 这种推广有什么优点，及研究新的模型时遇到的新问题，都是需要研究的.

(2) 张量分解、逼近及最大 (小) Z-特征值或其他类型的特征值的计算会越来越多地使用多项式优化、非线性分析中的结论和方法，特别是这里遇到的非线性优化问题的全局最优解的计算，属于多项式优化中需要研究的重要问题. 进一步发展的趋势及问题可参考下面多项式优化部分.

(3) 张量的秩有好几种定义，且这几种定义的值一般是不同的，这是和矩阵情形有重要区别的地方. 每一种定义的含义和特点，彼此之间的关系，秩的估计和计算是需要进一步研究的问题.

(4) 进一步研究求解更多特征值的方法. 在一些具体问题中, 特征值的含义也有待进一步研究.

2　多项式优化中的一些新进展

2.1　研究领域概述

多项式优化是指目标函数和约束函数均为多项式的一类特殊的非线性规划问题，由于多项式优化问题的KKT条件仍然为一个多项式系统，因此，多项式优化问题的研究也包括多项式方程组问题. 下面简要从多项式优化问题的数学模型、应用和数值算法等方面，对其发展历史、现状与前景做一介绍.

多项式优化的研究历史可追溯至Hilbert于1900年在巴黎召开的第二届国际数学家大会上提出的第17个问题, 即非负多项式与有理多项式 (即两个多项式的比) 的平方和 (SOS) 的等价性讨论[37]. 当时，Hilbert猜想: 任何一个实的非负多项式都能表示成有理多项式的平方和. 1927年Artin[38]证明该猜想成立. 为建立一个实的非负多项式的有理多项式的平方和的表达式，Delzell[39]给出了一类构造性算法.

多项式优化不仅在非线性规划问题中有基础性应用 (如序列二次规划算法、信赖域算法子问题等)，一些混合整数规划也可转化成多项式优化模型，而且经济、管理、交通、通信和工程中的大量实际问题都可以用多项式优化来建模 (如可见[40—50]). 因此, 多项式优化问题的研究不但吸引了许多优化研究学者的兴趣, 而且也引起了一批从事代数学研究学者的注意. 他们分别从理论分析和数值计算等角度对该问题展开研究, 取得了一系列重要研究成果. 其中，由于二次优化的特殊地位，其研究历史尤为悠久、所得成果尤为丰富 (可见[37, 50-54]).

另外，从量子力学和医学成像中提炼出的多项式优化问题属于一类特殊的齐次多项式优化问题. 基于齐次 (特别是高次齐次) 多项式优化与张量计算之间的密切关系，人们对这类多项式优化问题进行了系统研究，得到很多有意义的结果，如张量的低秩逼近和分解等[27, 31, 43, 55−57].

多项式优化问题一般是非凸的. 因此在多数情况下是NP-难的[58]，甚至在单位球上的齐次多项式极值问题也是如此[59]. 所以，要得到多项式优化模型的全局最优解是非常困难的. 对于多项式优化问题, 早期的工作[51, 60]多是基于代数学的Grobner基和结式 (Resultant) 理论来寻求一个多项式优化问题的所有临界点 (critical points)，从中寻求问题的最优解. 这类算法的缺陷是计算量太大, 它只适用于稀疏和低维问题. 但对于超图谱理论、高阶数理统计、复杂网络设计、多板块金融投资中的多项式优化模型，由于所涉及的多项式往往重数或次数较高，问题的规模较大，因此这种Grobner基和结式算法难以执行.

多项式优化问题的重要性及其在理论和算法设计上的困难成为推动多项式优化研究不断发展的动力. 作为非线性优化的特殊情形，设计求解其全局最优解的 (近似) 算法成为优化研究者的主要任务. 特别是，结合实际背景而提出的模型结构特殊.研究全局最优性条件并设计更为有效的近似算法成为多项式优化研究的主要内容之一.

2.2 几类具体的多项式优化的研究进展

多项式优化的研究大致分为连续型和离散型两类，有时根据实际问题需要又包含分离出混合型多项式优化模型. 不论是连续型还是离散型二次规划，由于其在非线性规划中的独特地位和在许多实际领域的广泛应用而受到特别关注. 近年来，高次多项式优化问题特别是具有特殊结构的齐次多项式优化问题的理论和算法研究取得重要进展，齐次高次模型也成为多项式优化领域的研究热点之一.

对于多项式优化问题，一个很自然的想法是使用已有的非线性规划方法求解. 但由于多项式优化问题的特殊性，特别是问题的规模往往非常大，直接用这些方法来求解一般效率很低. 多项式优化问题的另一直接的解法是借助最优性条件将其转化为一个非线性方程组问题[61]，然后设计求解方法[62−65]. 但在问题的规模很大时，这类方法计算量大的缺陷便凸显出来.

单位球面 (可以在不同范数的意义下) 约束的齐次多项式优化模型是一类特殊的多项式优化问题，此模型中的多项式目标函数次数可能相对较高. 这类模型在材料科学、统计学中有广泛应用，也是高阶张量特征值与特征向量概念的优化模型再现，正如前一部分所说，高阶张量低秩逼近与分解问题也可以表示为单位球面约束的齐次多项式优化模型. 对这种特殊结构的多项式优化问题，Qi等[27]通过引入张量特征值给出了一个循环递进的求解算法.

对于从证券投资组合问题提出的一类非凸多项式优化问题，Rustem等[66, 67]提出了一类扩散求解方法. 对于多项式整数规划问题，一个比较有效的技术是将其转化为最大全中的独立集问题[68, 69].

对于连续型多项式优化问题，一个比较流行的技术是将其松弛成一个可以在多项式时间内 (近似) 求解的凸优化模型，如线性规划 (LP)、半定规划 (SDP)、矩的对偶松弛等. 由于SDP问题有许多类似于线性规划的特征与性质，如SDP模型具有结构优良的对偶形式，在适当的约束规格 (如Slater约束规格) 下，强对偶定理成立. 这些性质成为设计各种求解SDP模型有效算法的理论基础. 20世纪90年代，Alizadeh[70]、Nesterov和Nemirovskii[71]分别独立地提出了求解SDP模型的内点算法，这为多项式优化问题的求解提供了方便.

SDP内点算法不仅使SDP模型在理论上更为重要, 实际应用也更为广泛. 由于SDP模型在理论上多项式时间可解，也有一些有效的算法，能以此用来得到许多整数规划和全局优化中难问题的紧逼近，所以在控制论、线路设计、传感网络定位和主成分分析等许多领域有广泛应用，同时也为近似求解多项式规划特别是非凸二次规划等NP-难问题提供了一个极为有效的途径.

多项式优化问题的另一种常见技术是基于非负多项式和多项式的平方和之间的关系而建立的SOS方法. 该方法主要通过对原多项式优化问题进行松弛得到序列半定规划问题使其最优值单调收敛于原问题的最优值. 从理论上讲，SOS方法可以求解任何多项式优化问题并达到所要求的计算精度. 对于一元多项式优化问题，Nesterov[72]证明SOS方法在多项式时间内可以得到问题的最优解. 该结论同样适用于无约束的可以表示成SOS形式的多元二次多项式和二元四次多项式优化问题.

对于一般的多项式优化问题, Shor等[37]通过某种转换将其转化为一个目标函数和约束函数均为二次多项式的优化问题, 然后通过松弛技术再将该问题转化为一个标准形式下的凸线性矩阵不等式问题 (LMI). 利用现成的算法可以在较短的时间内得到原问题最优值的一个下界. 为使得到的下界更接近原问题的最优值, 需要在中间转换的 (二次) 多项式优化问题中增加二次约束函数. 该类方法后来通过结合平方和 (SOS) 方法被Parrilo等[54, 73]进一步改进.

尽管并非所有的非负多项式都能表示成多项式的平方和, 但这类方法在实际计算过程中非常有效. SOS方法与半定规划问题密切相关，作为其变种, Lasserre等[53, 74]通过矩 (moment) 矩阵建立了多项式优化问题的半定规划问题的转化形式, 并通过半定规划问题的最优值序列来界定原问题的最优值，以达到所想要的精度. SOS方法需要求解半定规划问题，所以在问题的规模较大的时候，该算法变得不再实用.

用矩-SOS方法有时可在有限步内得到多项式优化的全局最优值，而且有比较好的理论性质和数值效果. 但由于求解过程中需要计算的半定规划问题的规模关于原问题中的变量维数和多项式的最高次数成近似指数函数，因此也只能用来计算规模较小或具有特殊形式 (如对称、稀疏) 的较大规模多项式优化问题, 而且要得到原问题的最优解有时需要对中间问题增加新的约束重新计算, 从而导致计算量的陡增[53, 54, 73]. 这成为制约多项式优化发展的一个瓶颈.

对于张量形式的多项式优化，由于算法的计算量与张量的阶数呈指数增长，为减少每一迭代步的计算量，人们使用交替优化方法或分层技术求解[31, 55]. 对于偶齐次多项式优化问题，引进平移技术可在一般情况下建立幂法的全局收敛性[75]，但该方法的计算效率有待提高.

基于上述分析，人们从另外一个角度对该问题展开研究：寻求多项式优化问题的近似解. 针对最大割 (Max-Cut) 问题中的二次规划模型，Goemans和Williamson[76]使用松弛方法得到原问题的0.878近似比算法. 随后，这一重要思想相继被许多学者推广到更一般的二次规划情形 ([26, 77—81]). 特别地，对于“$1, -1$”约束下的半正定二次多项式优化问题，Nesterov[82]得到0.636 近似比算法. 这些近似算法是迄今为止最有效的算法. 对于定义在多个椭球的交集上的二次规划问题，Nemirovski等[78]提出了一个$\Omega(\frac{1}{\ln m})$ 近似算法，该模型后来被Luo 等[77, 83]推广.

在以上所涉及的近似算法中，目标函数均是二次的. 而对于次数较高的多项式优化问题，其近似算法的研究仍处于起步阶段. 针对具有简单约束的特殊形式高次多项式优化问题，De Klerk等[84]给出了首个多项式时间近似方案 (PTAS). 随后，Barvinok等[85] 推广了该方法，对定义在单位球面上的多项式优化问题，给出了一类新的近似算法. 对定义在多个椭球的交集上的四次多项式优化问题，Luo和Zhang[86]将其松弛成二次半定规划问题，并进一步通过线性化方法建立了有效算法. 如前所述，对称张量或偏对称长方张量最大 (小) Z-特征值 (奇异值) 可以归结为单位球上齐次张量函数全局最优问题. Ling等[56]提出了双二次齐次函数在两个球面约束下的最优化模型，通过将其松弛为双线性半定规划模型给出了近似算法，其近似比值与[86]中结果相当. Yang等[87]考虑了更一般的模型，推广了已有的结果. 另外，和非凸二次规划半定松弛不同的是，双二次或四次张量函数的半定松弛，得到的优化问题仍然是非凸优化问题，一种技术是再采用一次松弛，以便得到一个可以计算的凸优化问题[22, 88]. Ling等[57]和Zhang等[89]通过双线性半定规划考虑了带二次约束的双二次多项式优化问题，给出了多项式时间的近似算法. 此外，Zhang等[90]考虑了单位球面上的三次齐次多项式优化问题，并给出了近似度估计. 对于任意次齐次多

项式优化在多个二次约束下的近似算法的突破来自于He等[91]的工作，他们首次提出了张量松弛的方法，通过将齐次多项式松弛为多重线性函数并建立其中的桥梁来处理一般的齐次多项式，给出了相应的近似算法. 后来，He等[92]又对定义在任意闭凸集上的非齐次多项式优化问题给出了多项式时间的近似算法，这是目前多项式优化近似算法研究中唯一能处理任意次非齐次多项式的研究结果. 此后，So[93]又采取计算几何与张量松弛相结合的方法，对球面约束下齐次多项式优化问题提出了新的近似算法，提高了近似比值. 此外，He等[94]还考虑了整数多项式优化问题和混合多项式优化问题. 有关多项式优化问题近似算法的最新发展，可参考Li等[95]最近的专著.

近来，从对偶角度对多项式优化问题最优值界的研究也逐渐兴起，其中包括De Klerk等[96]和Nie[97]所做的初步工作. 与近似算法不同，这类方法只能给出最大值问题的上界 (或者最小值问题的下界)，也不能得到近似解. 但所用方法都是基于SOS松弛分析. 从实用角度来看，如果对于某个特殊的多项式优化问题例子，此类估计恰好能达到近似算法的界，也就相当于找到了此问题的最优解.

除了连续型的多项式优化模型，决策变量仅取离散值的多项式优化模型也是一类被广泛应用和研究的多项式优化问题. 这类多项式优化模型不仅在图论而且在神经网络、代码纠差等研究领域有广泛应用. 离散决策变量的二次规划和双线性模型已被广泛研究，尤其是离散决策变量的二次规划模型，由于其与各种图划分问题密切相关而被深入研究. 自然地，离散决策变量的高次齐次多项式优化和多重线性优化模型都是值得研究的问题[55].

求解多项式优化问题软件目前相对较少，早期的软件有Gloptipoly[98]，SOSTOOLS[99]和基于稀疏结构多项式优化问题的软件SparsePOP[100]等. 这些软件大都基于SOS松弛方法并借助半定规划的求解算法编写而成，因此只能解决较小规模的多项式优化模型. 但是，随着计算机、高速网络的不断发展与并行计算技术的不断开发，求解较大规模特别稀疏的SDP模型成为可能[101, 102].

2.3 研究发展趋势与关键科学问题

多项式优化问题是一类特殊的数学规划问题. 一方面，它与连续优化、离散优化和凸优化等数学规划的其他分支融合与交叉；另一方面，它在理论上又与代数几何、交换代数和矩理论等纯数学领域有着密切联系，内容相当广泛. 我们将从理论、算法与应用三个方面简要叙述该领域今后发展的若干趋势和重要问题.

(1) 理论方面 基于矩理论的SOS方法的进一步研究和多项式锥性质分析等将成为关键研究问题.

a. 目前，基于Lasserre等级分解[53]的SOS方法在多项式优化理论研究中占有主导地位，这也将是多项式优化理论研究的一个重要发展方向，其主要内容包括：Lasserre等级的有限收敛分析，Nie[103, 104]对此已做了一些初步的工作；某些特殊多项式优化问题的SOS方法对称性研究，例如Riener[105]的研究；逆多项式优化问题[106].

b. 线性锥优化特别是半定规划在许多领域中的应用已非常显著. 自从Burer[107]证明一大类非凸 (含连续和离散变量) 的二次规划问题可以等价转换为双正锥规划 (copositive programming) 后，对于双正锥本身的研究已引起重要关注，进一步引发了对一些"难锥"的研究. Jiang等[82]研究了非负四次型锥，并证明一大类四次非齐次多项式问题亦可等价转换为线性四次型锥规划问题. 与一般的非负二次型锥 (半正定矩阵锥) 不同，非负四次型锥研究内容远比二次型锥丰富. 目前，相关研究仅处于初始阶段. 最近，Ahmadi等[108]证明了判别一般四次多项式的凹凸性是强NP-难的. 这些初步研究表明，对于高次多项式锥的理论研究非常重要，它将是推动多项式优化理论发展的重要课题之一.

c. 探析一般形式或具有实际背景且特殊结构的多项式优化问题的全局最优解的结构性质和判定准则. 充分利用多项式函数的特殊性建立最优性条件，也许可为求解一些特殊的多项式优化问题 (如张量的最小Z-特征值问题) 提供新途径. 虽已有一些研究 (见[109])，但这类问题的研究结果仍不是很多，它们是多项式全局优化的重要内容之一.

(2) 算法方面 多项式优化问题的全局最优算法设计是一项艰难的任务. 目前，虽有

许多不同类型的算法，但总体来说尚不完备. 进一步的有效的算法研究将是今后多项式优化研究最主要、根本的任务之一. 目前，算法设计研究的热点方向包括：实用的快速算法设计、更高近似比的算法设计以及基于SOS的特殊结构的 (高次) 多项式优化方法研究等.

a. 目前已有的算法设计研究大多是SOS方法和近似方法，二者都有不足. 例如，现有的近似方法理论上能保证的计算效果仍有相当的提高空间. 在计算张量最大特征值的多项式优化问题中，交替最小二乘法 (alternating least square)[1]和最大分块改进法 (maximum block improvement)[110]非常有效. 最近，Uschmajew[111]证明交替最小二乘法用于张量分解具有线性收敛性，这说明这类方法非常重要. 如何根据模型的特有结构，寻求快速有效的算法或者局部改进的方法将是今后多项式优化算法设计的一个重要研究方向.

b. SOS方法虽然有其局限性，但如何在充分利用所考虑模型的对称性和稀疏性的基础上，与SOS方法结合，设计可进行大规模计算的算法依然是一个有希望的发展方向，比如Waki等[100]开发的SparsePOP. 另外，如何基于SOS的几重松弛 (比如Lasserre松弛) 方法研究所考虑问题最优值的界也是SOS算法近几年研究的热点. 此算法可以被认为是近似算法的互补，它和近似算法所获得的近似值分别构成了原问题最优值的上下界. 目前，这方面的初步工作可见[96, 97].

c. 近似算法是多项式优化算法研究的热点之一. 首先，现有近似算法所研究模型的约束条件大都较为简单或具有某种对称结构 (比如椭圆、单位球面、离散整数格点等). 如何针对更一般多项式优化问题设计近似算法，是具有挑战性的课题. 其次，现有近似算法所获近似比值仍不太好. 虽然在实际计算中某些算法表现出远比其理论近似比值好的效果，但如何改进所设计算法的近似比值仍将是近似算法设计研究中最为重要的问题. 最近，He等[91] 改进了一大类齐次多项式优化问题近似算法的近似比值，但还是没能突破一个核心问题的瓶颈. 简单地说，就是单位球面约束下三次齐次多项式最大化问题的近似比值能不能超过$\Omega[(\frac{\ln n}{n})^{0.5}]$. 这涉及到另外一个目前在近似算法研究中一直没能获得突破的难题，即不可近似逼近的结果，这个问题，有待进一步研究.

(3) 应用方面 如前所述，多项式优化研究离不开其应用背景. 虽然多项式优化理论研究面临很大困难，但如何基于特殊结构和特殊数据的应用模型，找到有效算法求解并分析模型，是多项式优化研究的发展历史中一直值得重视的问题. 当前，受到特别关注的重要应用有：医学成像、张量分解与张量计算、信号处理、生物统计等方面. 另外，基于某些特殊结构的多项式优化问题，或者有特殊应用背景的多项式优化问题的专用软件的开发，也是一个值得重视的问题.

3 小 结

张量分析和多项式优化包含丰富的研究内容，目前也处于快速发展的阶段. 本文作者们对了解的一些课题和结果进行了综述，肯定还是不够全面的. 对本研究领域有兴趣的读者，可以通过查阅有关文献，对某些课题和内容做进一步详细的了解.

参 考 文 献

[1] Kolda T G, Bader B W. Tensor decompositions and applications [J]. *SIAM Review*, 2009, **51**(3): 455-500.

[2] Qi L, Sun W, Wang Y. Numerical multilinear algebra and its applications [J]. *Frontiers of Mathematics in China*, 2007, **2**(4): 501-526.

[3] Cichocki A, Zdunek R, Phan A H, et al. *Nonnegative Matrix and Tensor Factorizations: Applications to Exploratory Multi-way Data Analysis and Blind Source Separation* [M]. Chichester: John Wiley& Sons，2009.

[4] Lim L H, Comon P. Nonnegative approximations of nonnegative tensors [J]. *Journal of Chemometrics*, 2009, **23**(7-8): 432-441.

[5] Zhang X, Ling C, Qi L. The best rank-1 approximation of a symmetric tensor and related spherical optimization problems [J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2012, **33**(3): 806-821.

[6] Qi L. Eigenvalues of a real supersymmetric tensor [J]. *Journal of Symbolic Computation*, 2005, **40**(6): 1302-1324.

[7] Lim L H. Singular values and eigenvalues of tensors: a variational approach [C]//*Proceedings of the IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing*, 2005, **1**: 129-132.

[8] Chang K, Pearson K, Zhang T. On eigenvalue problems of real symmetric tensors [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2009, **350**(1): 416-422.

[9] Chang K, Zhang T. On the uniqueness and non-uniqueness of the positive Z-eigenvector for transition probability tensors [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2013, **408**(2): 525 – 540.

[10] Hu S, Huang Z H, Ling C, et al. On determinants and eigenvalue theory of tensors [J]. *Journal of Symbolic Computation*, 2013, **50**: 508-531.

[11] Qi L. Eigenvalues and invariants of tensors [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, **325**(2): 1363-1377.

[12] Han D, Dai H, Qi L. Conditions for strong ellipticity of anisotropic elastic materials [J]. *Journal of Elasticity*, 2009, **97**(1): 1-13.

[13] Ni Q, Qi L, Wang F. An eigenvalue method for the positive definiteness identification problem [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, **53**: 1096-1107.

[14] Chang K C, Pearson K, Zhang T. Perron-Frobenius theorem for nonnegative tensors [J]. *Communications in Mathematical Sciences*, 2008, **6**(2): 507-520.

[15] Yang Q, Yang Y. Further results for Perron-Frobenius theorem for nonnegative tensors II [J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2011, **32**(4): 1236-1250.

[16] Yang Y, Yang Q. Further results for Perron-Frobenius theorem for nonnegative tensors [J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2010, **31**(5): 2517-2530.

[17] Friedland S, Gaubert S, Han L. Perron-Frobenius theorem for nonnegative multilinear forms and extensions [J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2013, **438**(2): 738-749.

[18] Chang K, Qi L, Zhou G. Singular values of a real rectangular tensor [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2010, **370**(1): 284-294.

[19] Yang Y, Yang Q. Singular values of nonnegative rectangular tensors [J]. *Frontiers of Mathematics in China*, 2011, **6**(2): 363-378.

[20] Chang K, Qi L, Zhang T. A survey on the spectral theory of nonnegative tensors [J]. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 2013, **20**(6): 891-912.

[21] Yang Q, Zhang L, Zhang T, et al. Spectral theory of nonnegative tensors [J]. *Frontiers of Mathematics in China*, Doi: 10.1007/s11464-012-0273-7.

[22] Yang Y, Yang Q. Geometric simplicity of spectral radius of nonnegative irreducible tensors [J]. *Frontiers of Mathematics in China*, 2013, **8**(1): 129-140.

[23] Hu S, Huang Z, Qi L. Strictly nonnegative tensors and nonnegative tensor partition [J]. *Science China Mathematics*, 2014, **57**(1): 181-195.

[24] Ng M, Qi L, Zhou G. Finding the largest eigenvalue of a nonnegative tensor [J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2009, **31**(3): 1090-1099.

[25] Chang K, Pearson K J, Zhang T. Primitivity, the convergence of the NQZ method, the largest eigenvalue for nonnegative tensors [J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2011, **32**(3): 806-819.

[26] Zhang L, Qi L. Linear convergence of an algorithm for computing the largest eigenvalue of a nonnegative tensor [J]. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 2012, **19**(5): 830-841.

[27] Qi L, Wang F, Wang Y. Z-eigenvalue methods for a global polynomial optimization problem [J]. *Mathematical Programming*, 2009, **118**(2): 301-316.

[28] Chen Z, Qi L, Yang Q, et al. The solution methods for the largest eigenvalue (singular value) of nonnegative tensors and convergence analysis [J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2013, 4**39**: 3713-3733.

[29] Zhou G, Caccetta L, Teo K L, et al. Nonnegative polynomial optimization over unit spheres and convex programming relaxations [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2012, **22**(3): 987-1008.

[30] Kolda T G, Mayo J R. Shifted power method for computing tensor eigenpairs [J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2011, **32**(4): 1095-1124.

[31] Kofidis E, Regalia P A. On the best rank-1 approximation of higher-order supersymmetric tensors [J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2002, **23**(3): 863-884.

[32] Hu S, Huang Z H, Qi L. Finding the extreme Z-eigenvalues of tensors via a sequential semidefinite programming method [J]. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 2013, **20**(6): 972-984.

[33] Hu S, Qi L. Algebraic connectivity of an even uniform hypergraph [J]. *Journal of Combinatorial Optimization*, 2012, **24**(4): 564-579.

[34] Hägglöf K, Lindberg P, Svensson L. Eigenvalues of tensors and some very basic spectral hypergraph theory [R]. *Seminar speaking*, 2008.

[35] Pearson K J, Zhang T. On spectral hypergraph theory of the adjacency tensor. *Graphs and Combinatorics*, Doi: 10.1007/s00373-013-1340-x.

[36] Xie J, Chang A. On the Z-eigenvalues of the adjacency tensors for uniform hypergraphs [J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2013, **439**(8): 2195-2204.

[37] Shor N Z. *Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems* [M]. New York: Kluwer Academic Publishers, 1998.

[38] Artin E. über die zerlegung definiter funktionen in quadrate [M]//*Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, New York: Kluwer Academic Publishers, 1927, **5**: 100-115.

[39] Delzell C. A continuous, constructive solution to Hilbert's 17th problem [J]. *Inventiones Mathematicae*, 1984, **76**(3): 365-384.

[40] Basser P J, Mattiello J, LeBihan D. Mr diffusion tensor spectroscopy and imaging [J]. *Biophysical Journal*, 1994, **66**(1): 259-267.

[41] Basser P J, Mattiello J, Lebihan D. Estimation of the effective self-diffusion tensor from the NMR spin echo [J]. *Journal of Magnetic Resonance, Series* B, 1994, **103**(3): 247-254.

[42] Comon P, Mourrain B. Decomposition of quantics in sums of powers of linear forms [J]. *Signal Processing*, 1996, **53**(2): 93-107.

[43] Dahl G, Leinaas J M, Myrheim J, et al. A tensor product matrix approximation problem in quantum physics [J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2007, **420**(2): 711-725.

[44] Jensen J H, Helpern J A, Ramani A, et al. Diffusional kurtosis imaging: the quantification of non-Gaussian water diffusion by means of magnetic resonance imaging [J]. *Magnetic Resonance in Medicine*, 2005, **53**(6): 1432-1440.

[45] Lu H, Jensen J H, Ramani A, et al. Three-dimensional characterization of non-Gaussian water diffusion in humans using diffusion kurtosis imaging [J]. *NMR in Biomedicine*, 2006, **19**(2): 236-247.

[46] Mariere B, Luo Z Q, Davidson T N. Blind constant modulus equalization via convex optimization [J]. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 2003, **51**(3): 805-818.

[47] Markowitz H. Portfolio selection [J]. *Journal of Finance*, 1952, **7**(1): 77-91.

[48] Mattiello J, Basser P J, LeBihan D. Analytical expressions for the b matrix in NMR diffusion imaging and spectroscopy [J]. *Journal of magnetic resonance, Series* A, 1994, **108**(2): 131-141.

[49] Mattiello J, Basser P J, Bihan D Le. The b matrix in diffusion tensor echo-planar imaging [J]. *Magnetic Resonance in Medicine*, 1997, **37**(2): 292-300.

[50] Qi L, Teo K L. Multivariate polynomial minimization and its application in signal processing [J]. *Journal of Global Optimization*, 2003, **26**(4): 419-433.

[51] Hägglöf K, Lindberg P, Svensson L. Computing global minima to polynomial optimization problems using gröbner bases [J]. *Journal of Global Optimization*, 1995, **7**(2): 115-125.

[52] He S, Li Z, Zhang S. Approximation algorithms for homogeneous polynomial optimization with quadratic constraints [J]. *Mathematical Programming*, 2010, **125**(2): 353-383.

[53] Lasserre J B. Global optimization with polynomials and the problem of moments [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2001, **11**(3): 796-817.

[54] Parrilo P A, Sturmfels B. Minimizing polynomial functions [J]. *Discrete Math Theo Comput Sci*, 2003, **60**: 83-99.

[55] Lathauwer de L, Moor de B, Vandewalle J. On the best rank-1 and rank-$(r_1, r_2, ., r_n)$ approximation of higher-order tensors [J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2000, **21**(4): 1324-1342.

[56] Ling C, Nie J, Qi L, et al. Biquadratic optimization over unit spheres and semidefinite programming relaxations [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2009, **20**(3): 1286-1310.

[57] Ling C, Zhang X, Qi L. Semidefinite relaxation approximation for multivariate bi-quadratic optimization with quadratic constraints [J]. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 2012, **19**(1): 113-131.

[58] Gurvits L. Classical deterministic complexity of Edmonds' problem and quantum entanglement [C]*Proceedings of the* 35*th annual ACM symposium on Theory of computing*, New York: ACM, 2003, 10-19.

[59] Nesterov Y. Random walk in a simplex and quadratic optimization over convex polytopes [E-B/OL]. [2013-10-09]. https://alfresco.uclouvain.be/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/c7741b8a-6de9-4e67-9a09-c0051eff06dd/2003/coredp_2003_71.pdf.

[60] Cox D A, Little J B, O'Shea D. *Using Algebraic Geometry* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1998.

[61] Ghosh A, Tsigaridas E P, Descoteaux M, et al. A polynomial based approach to extract the maxima of an antipodally symmetric spherical function and its application to extract fiber directions from the Orientation Distribution Function in Diffusion MRI [C]//*CDMRI*'08-*MICCAI* 2008 *Workshop on Computational Diffusion MRI*, New York: États-Unis, 2008.

[62] Mourrain B, Pavone J P. Subdivision methods for solving polynomial equations [J]. *Journal of Symbolic Computation*, 2009, **44**(3): 292-306.

[63] Mourrain B, Trebuchet P. Generalized normal forms and polynomial system solving [C]//*Proceedings of the* 2005 *International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, New York: ACM, 2005, 253-260.

[64] Qi L. Extrema of a real polynomial [J]. *Journal of Global Optimization*, 2004, **30**(4): 405-433.

[65] Qi L, Wan Z, Yang Y. Global minimization of normal quartic polynomials based on global descent directions [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2004, **15**(1): 275-302.

[66] Maringer D, Parpas P. Global optimization of higher order moments in portfolio selection [J]. *Journal of Global Optimization*, 2009, **43**(2-3): 219-230.

[67] Parpas P, Rustem B. Global optimization of the scenario generation and portfolio selection problems [J]. *Computational Science and its Applications-ICCSA* 2006, 908-917.

[68] Balinski M. Notes-on a selection problem [J]. *Management Science*, 1970, **17**(3): 230-231.

[69] Rhys J. A selection problem of shared fixed costs and network flows [J]. *Management Science*, 1970, **17**(3): 200-207.

[70] Alizadeh-Dehkharghani F. Combinatorial optimization with interior point methods and semidefinite matrices [D]. Minnesota: University of Minnesota, 1992.

[71] Nesterov Y, Nemirovskii A S. *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming* [M]. Auckland: SIAM, 1994.

[72] Nesterov Y. Squared functional systems and optimization problems [J]. *High Performance Optimization*, 2000, **33**: 405-440.

[73] Parrilo P A. Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems [J]. *Mathematical programming*, 2003, **96**(2): 293-320.

[74] Lasserre J B. Semidefinite programming vs. LP relaxations for polynomial programming [J]. *Mathematics of Operations Research*, 2002, **27**(2): 347-360.

[75] 王宜举. 一类齐次多项式优化问题的一个全局优化算法 [J]. 应用数学学报, 2010, **33**(2): 328-337.

[76] Goemans M X, Williamson D P. Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming [J]. *Journal of the ACM*, 1995, **42**(6): 1115-1145.

[77] Luo Z Q, Sidiropoulos N D, Tseng P, et al. Approximation bounds for quadratic optimization with homogeneous quadratic constraints [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2007, **18**(1): 1-28.

[78] Nemirovski A, Roos C, Terlaky T. On maximization of quadratic form over intersection of ellipsoids with common center [J]. *Mathematical Programming*, 1999, **86**(3): 463-473.

[79] Nesterov Y. Semidefinite relaxation and nonconvex quadratic optimization [J]. *Optimization Methods and Software*, 1998, **9**(1-3): 141-160.

[80] Ye Y. Approximating quadratic programming with bound and quadratic constraints [J]. *Mathematical Programming*, 1999, **84**(2): 219-226.

[81] Ye Y. Approximating global quadratic optimization with convex quadratic constraints [J]. *Journal of Global Optimization*, 1999, **15**(1): 1-17.

[82] Jiang B, Li Z, Zhang S. On cones of nonnegative quartic forms [EB/OL]. [2013-09-21]. http://math.shu.edu.cn/teacher/zheningli/quartic_form.pdf.

[83] He S, Luo Z Q, Nie J, et al. Semidefinite relaxation bounds for indefinite homogeneous quadratic optimization [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2008, **19**(2): 503-523.

[84] Klerk de E, Laurent M, Parrilo P A. A PTAS for the minimization of polynomials of fixed degree over the simplex [J]. *Theoretical Computer Science*, 2006, **361**(2): 210-225.

[85] Barvinok A. Integration and optimization of multivariate polynomials by restriction onto a random subspace [J]. *Foundations of Computational Mathematics*, 2007, **7**(2): 229-244.

[86] Luo Z Q, Zhang S. A semidefinite relaxation scheme for multivariate quartic polynomial optimization with quadratic constraints [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2010, **20**(4): 1716-1736.

[87] Yang Y, Yang Q. On solving biquadratic optimization via semidefinite relaxation [J]. *Computational Optimization and Applications*, 2012, **53**(3): 845-867.

[88] Yang Y, Yang Q, Qi L. Properties and methods for finding the best rank-one approximation to higher-order tensors [J]. *Computational Optimization and Applications*, Doi: 10.1007/s10589-013-9617-9.

[89] Zhang X, Ling C, Qi L. Semidefinite relaxation bounds for bi-quadratic optimization problems with quadratic constraints [J]. *Journal of Global Optimization*, 2011, **49**(2): 293-311.

[90] Zhang X, Qi L, Ye Y. The cubic spherical optimization problems [J]. *Mathematics of Computation*, 2012, **81**(279): 1513-1525.

[91] He S, Jiang B, Li Z, et al. Probability bounds for polynomial functions in random variables [EB/OL]. [2013-11-20]. http://dx.doi.org/10.1287/moor.2013.0637.

[92] He S, Li Z, Zhang S. Inhomogeneous polynomial optimization over convex set: an approximation approach. *Mathematics of Computation*, 2014.

[93] So A M C. Deterministic approximation algorithms for sphere constrained homogeneous polynomial optimization problems [J]. *Mathematical Programming*, 2011, **129**(2): 357-382.

[94] He S, Li Z, Zhang S. Approximation algorithms for discrete polynomial optimization [J]. *Journal of the Operations Research Society of China*, 2013, **1**(1): 3-36.

[95] Li Z, He S, Zhang S. Approximation methods for polynomial optimization: Models, Algorithms, and Applications [M]. *Springer, New York*, 2012.

[96] Klerk de E, Laurent M. Error bounds for some semidefinite programming approaches to polynomial minimization on the hypercube [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2010, **20**(6): 3104-3120.

[97] Nie J. An approximation bound analysis for lasserre relaxation in multivariate polynomial optimization [J]. *Journal of the Operations Research Society of China*, 2013, **1**(3): 313-332.

[98] Henrion D, Lasserre J B. Gloptipoly: global optimization over polynomials with matlab and sedumi [J]. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 2003, **29**(2): 165-194.

[99] Prajna S, Papachristodoulou A, Parrilo P A. Sostools: sum of squares optimization toolbox for matlab-user’s guide. *Control and Dynamical Systems, California Institute of Technology, Pasadena, CA*, 91125, 2004.

[100] Waki H, Kim S, Kojima M, et al. Algorithm 883: sparse POP—a sparse semidefinite programming relaxation of polynomial optimization problems [J]. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 2008, **35**(2): 15.

[101] Waki H, Kim S, Kojima M, et al. Sums of squares and semidefinite program relaxations for polynomial optimization problems with structured sparsity [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2006, **17**(1): 218-242.

[102] Yamashita M, Fujisawa K, Fukuda M, et al. Latest developments in the sdpa family for solving large-scale sdps [J]. *Handbook on Semidefinite, Conic and Polynomial Optimization*, 2012, 687-713.

[103] Nie J. Certifying convergence of lasserre's hierarchy via flat truncation [J]. *Mathematical Programming*, 2013, **142**(1-2): 485-510.

[104] Nie J. Optimality conditions and finite convergence of Lasserre's hierarchy. *Mathematical Programming*, Doi: 10.1007/s10107-013-0680-x.

[105] Riener C, Theobald T, Jansson L, et al. Exploiting symmetries in sdp-relaxations for polynomial optimization [J]. *Mathematics of Operations Research,* 2013, **38**(1): 121-141.

[106] Lasserre J B. Inverse polynomial optimization [J]. *Mathematics of Operations Research,* 2013, **38**(3): 418-436.

[107] Burer S. On the copositive representation of binary and continuous nonconvex quadratic programs [J]. *Mathematical Programming*, 2009, **120**(2): 479-495.

[108] Ahmadi A A, Olshevsky A, Parrilo P A, et al. Np-Hardness of deciding convexity of quartic polynomials and related problems [J]. *Mathematical Programming*, 2013, **137**(1-2): 453-476.

[109] Hu S, Huang Z H. Theorems of the alternative for inequality systems of real polynomials [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2012, **154**(1): 1-16.

[110] Chen B, He S, Li Z, et al. Maximum block improvement and polynomial optimization [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2012, **22**(1): 87-107.

[111] Uschmajew A. Local convergence of the alternating least squares algorithm for canonical tensor approximation [J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2012, **33**(2): 639-652.